

1. 4분 전의 차의 위치를 A, 현재의 차의 위치를 B라 하자. 또한 탑의 위치를 C라 하자.

문제의 가정에 의해 $\angle CAB = 20^\circ$, $\angle ABC = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$ 이다.

그러므로 $\angle ACB = 180^\circ - (20^\circ + 117^\circ) = 43^\circ$ 이다.

제시문 <가>에 의해 $\overline{AB} = 4$ (km). 따라서 사인 법칙에 의해

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 43^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 20^\circ}. \quad \text{즉} \quad \overline{BC} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 43^\circ} \overline{AB} = \frac{0.34}{0.68} \times 4 = 2$$

탑과 도로 간의 최단거리를 h km 라 하면,

$$h = \overline{BC} \cos \angle BCD = 2 \cos 27^\circ = 2 \times 0.89 = 1.78 \text{ 이다.}$$

따라서 탑과 도로 간의 최단 거리는 1.78 km 이다.

답: 1.78 km

2. <해1> 기지국 A, B의 좌표를 각각 A(0,0), B(4,0)이라 두고, 직선 도로의 방정식을 $y = h > 0$ 이라 하자.

현재 차의 좌표를 C(x,h)라 하고, 선분 \overline{AB} 와 \overline{BC} 가 이루는 각을 θ 라 하면 코사인 법칙에 의해

$$\cos \theta = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{8} \text{ 이고, 따라서}$$

$$x = 4 - 3 \cos \theta = 4 - 3 \cdot \frac{7}{8} = \frac{11}{8}, \quad h = 3 \sin \theta = 3 \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{15}}{8} \text{ 이다.}$$

제시문 <가>에 의해 1분 후의 차의 좌표는 $\left(\frac{19}{8}, \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$ 이다. 따라서

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{19^2}{8^2} + \frac{9 \cdot 15}{8^2}\right) + \left(\left(4 - \frac{19}{8}\right)^2 + \frac{9 \cdot 15}{8^2}\right) = \frac{19^2 + 13^2 + 2 \cdot 9 \cdot 15}{64} = \frac{800}{64} = \frac{25}{2} \text{ 이다.}$$

<해2> 점 C에서 선분 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 D라 하자.

$$\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = h^2 = \overline{BC}^2 - (4 - \overline{AD})^2 \text{ 이므로, } 4 - \overline{AD}^2 = 9 - (4 - \overline{AD})^2.$$

$$\text{이를 풀면, } \overline{AD} = \frac{11}{8}, \quad h = \sqrt{4 - \left(\frac{11}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{15}}{8} \text{ 이다.}$$

이제 <해1>과 같은 방법으로 구하면, $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{25}{2}$ 이다.

답: $\frac{25}{2}$

3. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{4a_k}{k+2} = (n^2 - n) \cdot (n^2 + 3n + 2)$ 라고 하자.

$S_n - S_{n-1}$ 을 $n \geq 2$ 에 대해 두 가지 방식으로 구하면, 다음과 같다.

$$(1) \quad S_n - S_{n-1} = (n-1)n(n+1)(n+2) - (n-2)(n-1)n(n+1) = 4(n-1)n(n+1)$$

$$(2) \quad S_n - S_{n-1} = \frac{4a_n}{n+2}$$

그러므로 $n \geq 2$ 에 대해 $a_n = (n-1)n(n+1)(n+2)$ 임을 알 수 있다.

$$\text{또한, } \sum_{k=2}^n \left(\frac{a_k}{k-1} - k^2(k+3) \right) = \sum_{k=2}^n (k(k+1)(k+2) - k^2(k+3)) = \sum_{k=2}^n 2k = 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) = n^2 + n - 2 \text{ 이므로,}$$

이차함수 $f(n) = an^2 + bn + c$ 는 $n = 2, 3, 4$ 일 때, 각각 4, 10, 18를 함숫값으로 가진다.

대입하여 정리하면, $\begin{cases} 4a + 2b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 10 \\ 16a + 4b + c = 18 \end{cases}$ 와 같이 일차 연립방정식으로 쓸 수 있다.

미지수 a, b, c 에 대한 일차 연립방정식을 풀면, $a = 1, b = 1, c = -2$ 을 구할 수 있고, 따라서 $f(n) = n^2 + n - 2$ 이 된다.

마지막으로, $f(x)$ 를 대입하여 극한값을 계산하면, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 3}{x + 2}$ 는 $x \rightarrow -2$ 일 때, 분자는 -1 , 분모는 0

으로 수렴하여, 극한값이 존재하지 않는다.

답: 극한값이 존재하지 않는다.